ÉCOLE NAVALE

Concours 1986

Première composition de mathématiques

1° On considère la fonction des deux variables réelles (x, t) définie par : $F(x, t) = \text{Ln}(x^2 - 2xe^t \cos t + e^{2t})$, où le symbole Ln représente le logarithme népérien, et le nombre e la base de ce logarithme.

a) Préciser le domaine de définition de la fonction $F(x, t)$.

Montrer que pour t fixé, on peut mettre $F(x, t)$ sous la forme $\text{Ln}(X^2 + a^2)$ où X est une fonction affine de x, qu'on explicitera, et où a est indépendant de x. Exprimer a en fonction de t.

b) On considère t comme un paramètre donné. Soit $y = F(x, t)$ la fonction de la variable x obtenue, et C_t son graphe. Déterminer, en fonction de t, les coordonnées du point M_0 de la courbe C_t où la tangente est parallèle à l'axe Ox (quand ce point existe).

c) Déterminer les coordonnées des points d'inflexion, M_1 et M_2, de C_t (quand ces points existent), et les tangentes en ces points à la courbe C_t. Soit T le point d'intersection de ces tangentes. Par quelle transformation géométrique simple, indépendante de t, peut-on passer du point T au point M_0 ?

d) Tracer l'allure de la courbe C_t, en prenant garde au cas particulier. On ne cherchera pas à placer cette courbe par rapport à l'axe Ox.

e) Donner la valeur du rayon de courbure en M_0 de la courbe C_t.

2° *a)* Déterminer, pour t fixé, le développement en série entière de la fonction qui à x associe $F(x, t)$ (où t est considéré comme un paramètre) dans un voisinage de 0, ainsi que le rayon de convergence de cette série entière.

b) Montrer que la fonction U qui à x associe $U(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} F(x, t)\, dt$ est continue et indéfiniment dérivable sur l'intervalle ouvert $\mathcal{J} =]-e^{-\pi}, e^{-\pi}[$.

c) Montrer que la série obtenue au § 2°, *a)*, considérée maintenant comme série de fonctions de t, lorsque x est fixé dans $\mathcal{J}$, converge uniformément lorsque t décrit le segment $[-\pi, +\pi]$.

d) En déduire un développement en série entière de la fonction U, et en préciser le rayon de convergence.

3° On considère maintenant la fonction $G(x, t) = \text{Arc tan}\dfrac{x - e^t \cos t}{e^t \sin t}$, dans laquelle x décrit l'intervalle $\mathcal{J} =]-e^{-\pi}, e^{-\pi}[$.

a) Montrer que pour tout x fixé dans $\mathcal{J}$, on peut prolonger par continuité sur $[-\pi, 0]$ (respectivement sur $[0, \pi]$) la restriction à $]-\pi, 0[$ (respectivement à $]0, \pi[$) de la fonction qui à t associe $G(x, t)$. On note dans la suite $G_1(x, t)$ (respectivement $G_2(x, t)$) le prolongement obtenu.

b) Préciser alors les expressions de $G_1(0, t)$ et de $G_2(0, t)$ sous forme simple.

c) Donner, sur l'intervalle $\mathcal{J}$, un développement en série entière de la fonction qui à x associe $G_1(x, t)$ lorsque t est un paramètre fixé appartenant à $[-\pi, 0]$, puis un développement en série entière de la fonction qui à x associe $G_2(x, t)$ lorsque t est fixé dans $[0, \pi]$.

d) Établir l'existence des fonctions V_1 et V_2 définies par $V_1(x) = \int_{-\pi}^{0} G_1(x, t)\, dt$ et $V_2(x) = \int_0^{\pi} G_2(x, t)\, dt$, et en donner des développements en série entière sur l'intervalle $\mathcal{J}$.

e) Quel est alors le développement en série entière sur $\mathcal{J}$ de la fontion $V = V_1 + V_2$? Comparer les fonctions U et V sur l'intervalle $\mathcal{J}$.